

Secciones Cónicas

Parábola, elipse e hipérbola

Juan Ricardo Muñoz

Departamento de Ingeniería Matemática (DIM)
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Introducción al Cálculo – MA1001

¿Qué es una sección cónica?

La parábola

La elipse

La hipérbola

Reconociendo las cónicas

¿Qué es una sección cónica?

La parábola

La elipse

La hipérbola

Reconociendo las cónicas

¿De dónde vienen las cónicas?

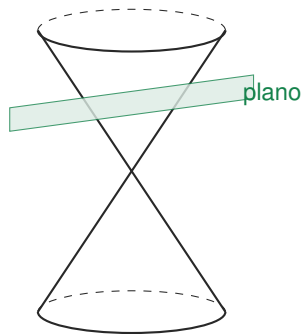
Las **secciones cónicas** aparecen al intersectar un cono con un plano.

¿De dónde vienen las cónicas?

Las **secciones cónicas** aparecen al intersectar un cono con un plano.

Dependiendo de la inclinación del plano aparecen diferentes curvas:

- circunferencia,



Pregunta

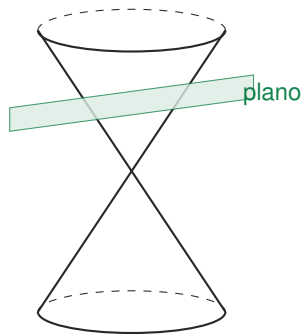
¿Podemos reconocer estas curvas sin necesidad de mirar el cono?

¿De dónde vienen las cónicas?

Las **secciones cónicas** aparecen al intersectar un cono con un plano.

Dependiendo de la inclinación del plano aparecen diferentes curvas:

- ▶ circunferencia,
- ▶ elipse,



Pregunta

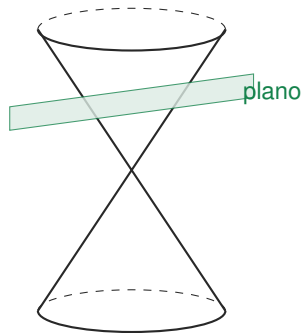
¿Podemos reconocer estas curvas sin necesidad de mirar el cono?

¿De dónde vienen las cónicas?

Las **secciones cónicas** aparecen al intersectar un cono con un plano.

Dependiendo de la inclinación del plano aparecen diferentes curvas:

- ▶ circunferencia,
- ▶ elipse,
- ▶ parábola,



Pregunta

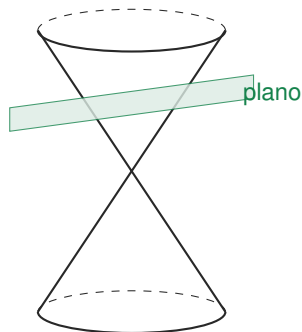
¿Podemos reconocer estas curvas sin necesidad de mirar el cono?

¿De dónde vienen las cónicas?

Las **secciones cónicas** aparecen al intersectar un cono con un plano.

Dependiendo de la inclinación del plano aparecen diferentes curvas:

- ▶ circunferencia,
- ▶ elipse,
- ▶ parábola,
- ▶ hipérbola.



Pregunta

¿Podemos reconocer estas curvas sin necesidad de mirar el cono?

Una idea geométrica común

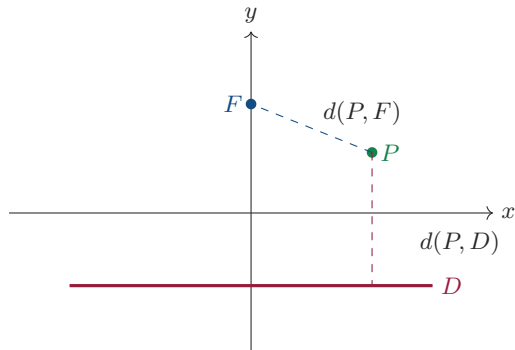
Consideremos:

- ▶ un punto fijo F , denominado **foco**,
- ▶ una recta fija D , denominada **directriz**,
- ▶ un punto variable $P = (x, y)$.

Una idea geométrica común

Consideremos:

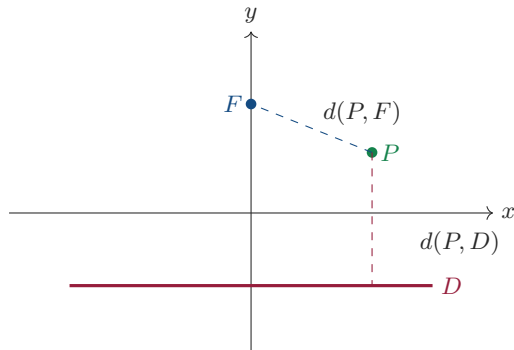
- ▶ un punto fijo F , denominado **foco**,
- ▶ una recta fija D , denominada **directriz**,
- ▶ un punto variable $P = (x, y)$.



Una idea geométrica común

Consideremos:

- ▶ un punto fijo F , denominado **foco**,
- ▶ una recta fija D , denominada **directriz**,
- ▶ un punto variable $P = (x, y)$.



La relación entre estas dos distancias determinará la curva.

Definición

Sea F un punto fijo y D una recta que no contiene a F . Una **cónica** es el conjunto de puntos P que satisfacen

$$d(P, F) = e d(P, D),$$

donde $e > 0$ se denomina **excentricidad**.

Definición

Sea F un punto fijo y D una recta que no contiene a F . Una **cónica** es el conjunto de puntos P que satisfacen

$$d(P, F) = e d(P, D),$$

donde $e > 0$ se denomina **excentricidad**.

Excentricidad	Cónica	Comportamiento
$0 < e < 1$	Elipse	cerrada
$e = 1$	Parábola	abierta
$e > 1$	Hipérbola	dos ramas

Definición

Sea F un punto fijo y D una recta que no contiene a F . Una **cónica** es el conjunto de puntos P que satisfacen

$$d(P, F) = e d(P, D),$$

donde $e > 0$ se denomina **excentricidad**.

Excentricidad	Cónica	Comportamiento
$0 < e < 1$	Elipse	cerrada
$e = 1$	Parábola	abierta
$e > 1$	Hipérbola	dos ramas

Idea central

Las tres curvas pueden estudiarse a partir de la misma condición geométrica.

¿Qué es una sección cónica?

La parábola

La elipse

La hipérbola

Reconociendo las cónicas

Definición

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D .

Definición

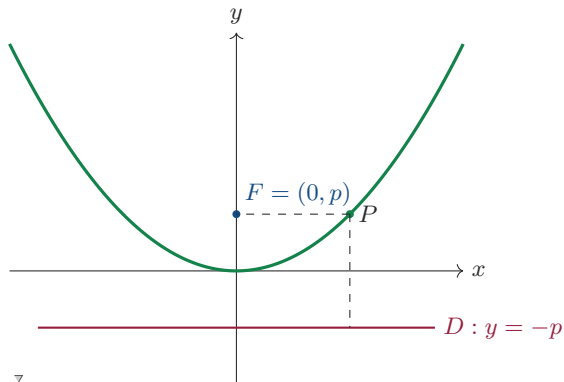
Una parábola es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D .

Por lo tanto, $d(P, F) = d(P, D) \implies e = 1$

Definición

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D .

Por lo tanto, $d(P, F) = d(P, D) \implies e = 1$



Derivemos la ecuación de la parábola

Tomemos

$$F = (0, p), \quad D : y = -p, \quad P = (x, y).$$

Derivemos la ecuación de la parábola

Tomemos

$$F = (0, p), \quad D : y = -p, \quad P = (x, y).$$

Por definición,

$$d(P, F) = d(P, D).$$

Derivemos la ecuación de la parábola

Tomemos

$$F = (0, p), \quad D : y = -p, \quad P = (x, y).$$

Por definición,

$$d(P, F) = d(P, D).$$

Luego,

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Derivemos la ecuación de la parábola

Tomemos

$$F = (0, p), \quad D : y = -p, \quad P = (x, y).$$

Por definición,

$$d(P, F) = d(P, D).$$

Luego,

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2, \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2. \end{aligned}$$

Derivemos la ecuación de la parábola

Tomemos

$$F = (0, p), \quad D : y = -p, \quad P = (x, y).$$

Por definición,

$$d(P, F) = d(P, D).$$

Luego,

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= (y + p)^2, \\ x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= y^2 + 2py + p^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x^2 = 4py}.$$

¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

Consideremos

$$x^2 = 4py.$$

¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

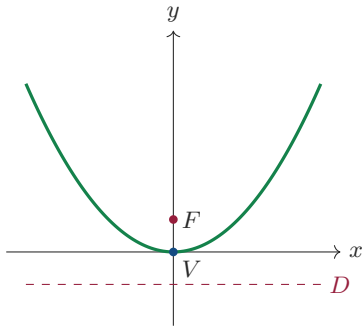
Consideremos

$$x^2 = 4py.$$

► Si (x, y) pertenece a la parábola, entonces

$$(-x, y)$$

también pertenece.



¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

Consideremos

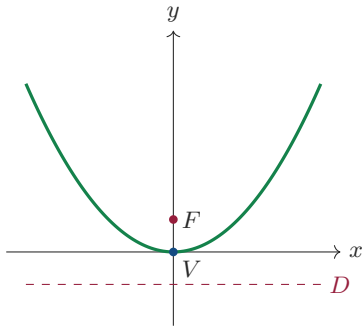
$$x^2 = 4py.$$

- Si (x, y) pertenece a la parábola, entonces

$$(-x, y)$$

también pertenece.

- Por lo tanto, el eje OY es un **eje de simetría**.



¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

Consideremos

$$x^2 = 4py.$$

- Si (x, y) pertenece a la parábola, entonces

$$(-x, y)$$

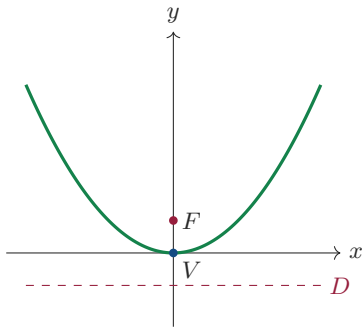
también pertenece.

- Por lo tanto, el eje OY es un **eje de simetría**.

- El punto

$$(0, 0)$$

pertenece a la parábola.



¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

Consideremos

$$x^2 = 4py.$$

- Si (x, y) pertenece a la parábola, entonces

$$(-x, y)$$

también pertenece.

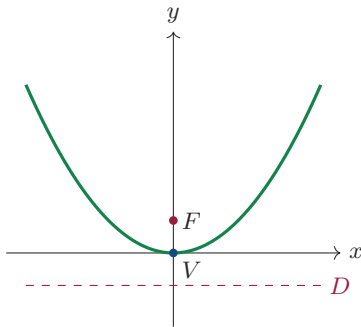
- Por lo tanto, el eje OY es un **eje de simetría**.

- El punto

$$(0, 0)$$

pertenece a la parábola.

- Este punto es el **vértice**.



¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

Consideremos

$$x^2 = 4py.$$

- ▶ Si (x, y) pertenece a la parábola, entonces

$$(-x, y)$$

también pertenece.

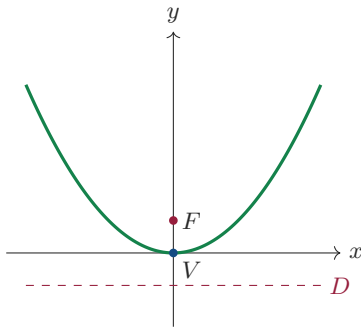
- ▶ Por lo tanto, el eje OY es un **eje de simetría**.

- ▶ El punto

$$(0, 0)$$

pertenece a la parábola.

- ▶ Este punto es el **vértice**.
- ▶ Si $p > 0$, entonces $y \geq 0$.



¿Qué nos dice $x^2 = 4py$?

Consideremos

$$x^2 = 4py.$$

- ▶ Si (x, y) pertenece a la parábola, entonces

$$(-x, y)$$

también pertenece.

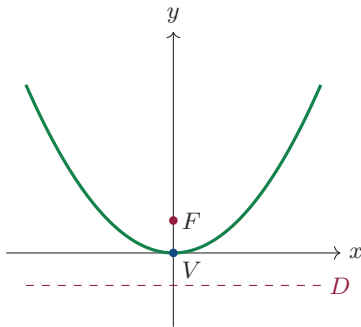
- ▶ Por lo tanto, el eje OY es un **eje de simetría**.

- ▶ El punto

$$(0, 0)$$

pertenece a la parábola.

- ▶ Este punto es el **vértice**.
- ▶ Si $p > 0$, entonces $y \geq 0$.
- ▶ Si $p < 0$, entonces $y \leq 0$.



Forma canónica

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Forma canónica

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Sus elementos son:

$$V = (x_0, y_0),$$

$$F = (x_0, y_0 + p),$$

$$D : y = y_0 - p.$$

Forma canónica

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

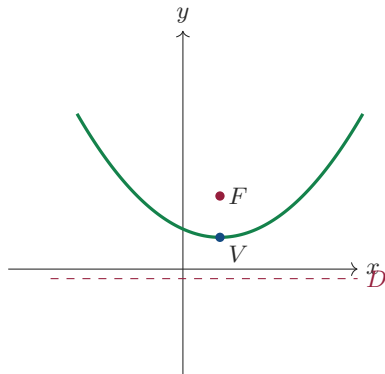
Sus elementos son:

$$V = (x_0, y_0),$$

$$F = (x_0, y_0 + p),$$

$$D : y = y_0 - p.$$

- ▶ $p > 0$: abre hacia arriba.
- ▶ $p < 0$: abre hacia abajo.



Forma canónica

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Forma canónica

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Entonces,

$$V = (x_0, y_0),$$

$$F = (x_0 + p, y_0),$$

$$D : x = x_0 - p.$$

Forma canónica

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

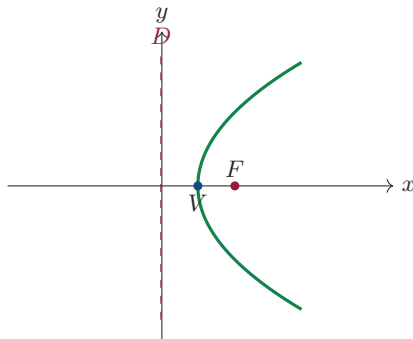
Entonces,

$$V = (x_0, y_0),$$

$$F = (x_0 + p, y_0),$$

$$D : x = x_0 - p.$$

- ▶ $p > 0$: abre hacia la derecha.
- ▶ $p < 0$: abre hacia la izquierda.



Ejemplo

Considere la parábola dada por

$$y^2 - 6y - 8x + 1 = 0.$$

1. Lleve la ecuación a su forma canónica.
2. Determine el vértice, el foco y la directriz.
3. Indique el eje de simetría y la dirección en la que abre la parábola.

¿Qué es una sección cónica?

La parábola

La elipse

La hipérbola

Reconociendo las cónicas

Definición

La elipse corresponde al caso

$$0 < e < 1.$$

Definición

La elipse corresponde al caso

$$0 < e < 1.$$

Geométricamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

Definición

La elipse corresponde al caso

$$0 < e < 1.$$

Geométricamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

A diferencia de la parábola:

- ▶ la curva es **cerrada**,

Definición

La elipse corresponde al caso

$$0 < e < 1.$$

Geométricamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

A diferencia de la parábola:

- ▶ la curva es **cerrada**,
- ▶ posee dos focos,

Definición

La elipse corresponde al caso

$$0 < e < 1.$$

Geométricamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

A diferencia de la parábola:

- ▶ la curva es **cerrada**,
- ▶ posee dos focos,
- ▶ posee dos ejes de simetría,

Definición

La elipse corresponde al caso

$$0 < e < 1.$$

Geométricamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

A diferencia de la parábola:

- ▶ la curva es **cerrada**,
- ▶ posee dos focos,
- ▶ posee dos ejes de simetría,
- ▶ posee un centro.

Ecuación canónica de una elipse

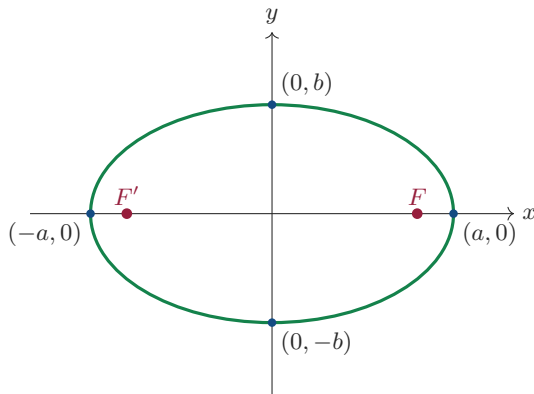
La forma más conocida es

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad a > b > 0.$$

Ecuación canónica de una elipse

La forma más conocida es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$



Para

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0,$$

definimos

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Para

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0,$$

definimos

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Los focos son

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Para

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0,$$

definimos

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Los focos son

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Como

$$c < a,$$

se sigue que

$$0 < e < 1.$$

Interpretación

Mientras más cerca esté e de 0, más parecida a una circunferencia será la elipse.

Eje mayor horizontal

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Eje mayor vertical

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \quad a > b.$$

$$F_{\pm} = (x_0, y_0 \pm c).$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Eje mayor horizontal

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Eje mayor vertical

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \quad a > b.$$

$$F_{\pm} = (x_0, y_0 \pm c).$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

¿Cómo reconocer el eje mayor?

El denominador más grande indica la dirección del eje mayor.

Ecuación canónica

Para una elipse con eje mayor horizontal,

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}, \quad a > b > 0.$$

Ecuación canónica

Para una elipse con eje mayor horizontal,

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}, \quad a > b > 0.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Semieje mayor: a .

► Semieje menor: b .

► Relación fundamental:

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}.$$

Focos y excentricidad

Los focos están sobre el eje mayor:

$$\boxed{F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0)}.$$

La excentricidad está dada por

$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}, \quad 0 < e < 1.$$

Ecuación canónica

Para una elipse con eje mayor horizontal,

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}, \quad a > b > 0.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Semieje mayor: a .

► Semieje menor: b .

► Relación fundamental:

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}.$$

Focos y excentricidad

Los focos están sobre el eje mayor:

$$\boxed{F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0)}.$$

La excentricidad está dada por

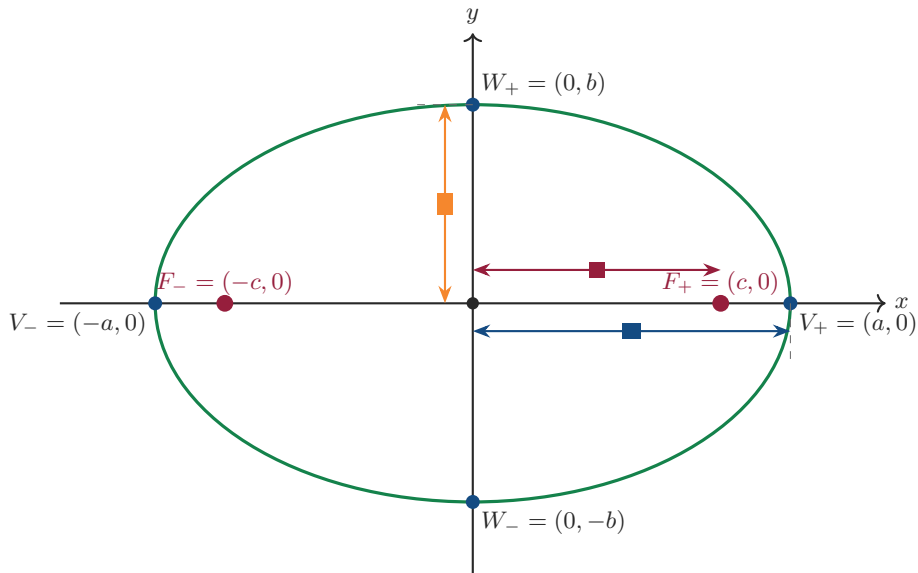
$$\boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}, \quad 0 < e < 1.$$

Los vértices principales son

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0),$$

y los vértices secundarios,

$$W_{\pm} = (x_0, y_0 \pm b).$$



¿Qué es una sección cónica?

La parábola

La elipse

La hipérbola

Reconociendo las cónicas

Definición

La hipérbola corresponde al caso

$$e > 1.$$

Definición

La hipérbola corresponde al caso

$$e > 1.$$

Nuevamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

Definición

La hipérbola corresponde al caso

$$e > 1.$$

Nuevamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

Pero ahora aparecen algunas características nuevas:

- ▶ la curva tiene **dos ramas**,

Definición

La hipérbola corresponde al caso

$$e > 1.$$

Nuevamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

Pero ahora aparecen algunas características nuevas:

- ▶ la curva tiene **dos ramas**,
- ▶ posee dos focos,

Definición

La hipérbola corresponde al caso

$$e > 1.$$

Nuevamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

Pero ahora aparecen algunas características nuevas:

- ▶ la curva tiene **dos ramas**,
- ▶ posee dos focos,
- ▶ posee dos directrices,

Definición

La hipérbola corresponde al caso

$$e > 1.$$

Nuevamente,

$$d(P, F) = e d(P, D).$$

Pero ahora aparecen algunas características nuevas:

- ▶ la curva tiene **dos ramas**,
- ▶ posee dos focos,
- ▶ posee dos directrices,
- ▶ posee dos asíntotas.

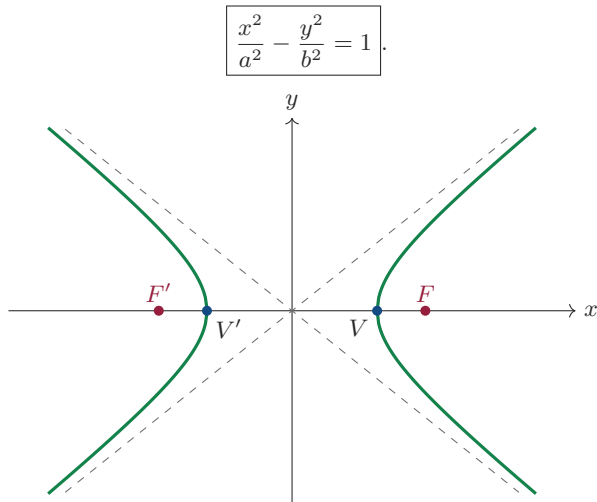
Ecuación canónica de una hipérbola

Consideremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ecuación canónica de una hipérbola

Consideremos



Para

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

definimos

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Para

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

definimos

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Los focos son

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Para

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

definimos

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Los focos son

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Como

$$c > a,$$

se sigue que

$$e > 1.$$

Para

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

definimos

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Los focos son

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Como

$$c > a,$$

se sigue que

$$e > 1.$$

Observación

A diferencia de la elipse, los focos de la hipérbola se encuentran más alejados del centro que sus vértices.

¿De dónde aparecen las asíntotas?

Consideremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

¿De dónde aparecen las asíntotas?

Consideremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En el primer cuadrante,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

¿De dónde aparecen las asíntotas?

Consideremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En el primer cuadrante,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Factorizando x^2 ,

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

¿De dónde aparecen las asíntotas?

Consideremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En el primer cuadrante,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Factorizando x^2 ,

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando x es muy grande,

$$\frac{a^2}{x^2} \approx 0.$$

Por lo tanto,

$$y \approx \frac{b}{a} x.$$

¿De dónde aparecen las asíntotas?

Consideremos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En el primer cuadrante,

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Factorizando x^2 ,

$$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando x es muy grande,

$$\frac{a^2}{x^2} \approx 0.$$

Por lo tanto,

$$y \approx \frac{b}{a} x.$$

Por simetría obtenemos las dos asíntotas:

Horizontal

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Focos:

$$(x_0 \pm c, y_0).$$

Asíntotas:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Vertical

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Focos:

$$(x_0, y_0 \pm c).$$

Asíntotas:

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0).$$

Horizontal

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Focos:

$$(x_0 \pm c, y_0).$$

Asíntotas:

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

En ambos casos,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Vertical

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Focos:

$$(x_0, y_0 \pm c).$$

Asíntotas:

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0).$$

Ecuación canónica

Para una hipérbola con eje transversal horizontal,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Ecuación canónica

Para una hipérbola con eje transversal horizontal,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

La excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad e > 1.$$

Ecuación canónica

Para una hipérbola con eje transversal horizontal,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

La excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad e > 1.$$

Las asíntotas son

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Ecuación canónica

Para una hipérbola con eje transversal horizontal,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

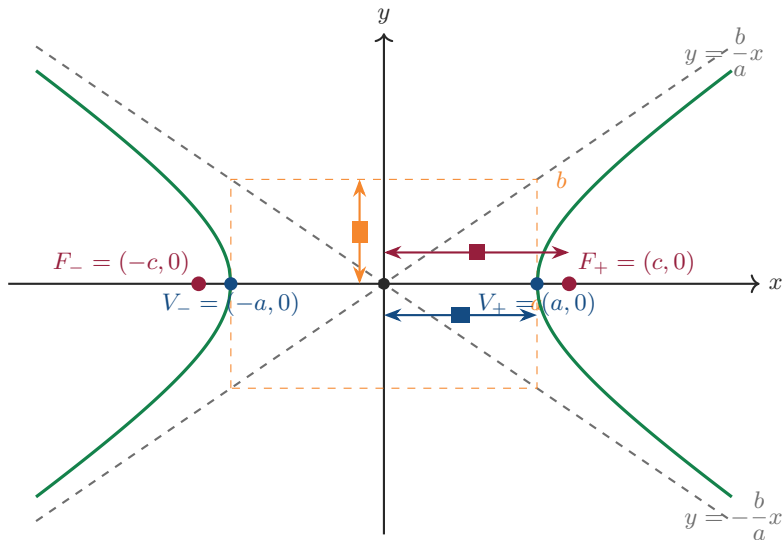
$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

La excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad e > 1.$$

Las asíntotas son

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$



¿Qué es una sección cónica?

La parábola

La elipse

La hipérbola

Reconociendo las cónicas

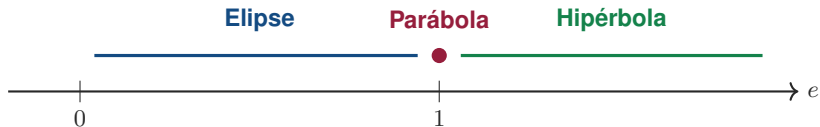
Ecuación	Cónica
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse
$x^2 = 4py$	Parábola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbola

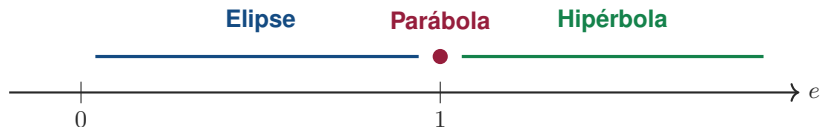
Ecuación	Cónica
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse
$x^2 = 4py$	Parábola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbola

Una primera regla visual

- ▶ Dos términos cuadrados con el **mismo signo**: elipse.
- ▶ Solo una variable aparece al cuadrado: parábola.
- ▶ Dos términos cuadrados con **signos opuestos**: hipérbola.

El papel de la excentricidad





$0 < e < 1$	$\Rightarrow$	elipse,
$e = 1$	$\Rightarrow$	parábola,
$e > 1$	$\Rightarrow$	hipérbola.

¿Qué información debemos buscar?

Paso 1

Identifique qué variables aparecen elevadas al cuadrado.

¿Qué información debemos buscar?

Paso 1

Identifique qué variables aparecen elevadas al cuadrado.

Paso 2

Agrupe los términos correspondientes a cada variable.

¿Qué información debemos buscar?

Paso 1

Identifique qué variables aparecen elevadas al cuadrado.

Paso 2

Agrupe los términos correspondientes a cada variable.

Paso 3

Complete cuadrados cuando sea necesario.

¿Qué información debemos buscar?

Paso 1

Identifique qué variables aparecen elevadas al cuadrado.

Paso 2

Agrupe los términos correspondientes a cada variable.

Paso 3

Complete cuadrados cuando sea necesario.

Paso 4

Lleve la ecuación a su forma canónica.

¿Qué información debemos buscar?

Paso 1

Identifique qué variables aparecen elevadas al cuadrado.

Paso 2

Agrupe los términos correspondientes a cada variable.

Paso 3

Complete cuadrados cuando sea necesario.

Paso 4

Lleve la ecuación a su forma canónica.

Paso 5

Determine centro o vértice, focos, directrices, ejes y asíntotas según corresponda.

Forma canónica

Para una parábola vertical,

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

► Vértice:

$$V = (x_0, y_0).$$

► Foco:

$$F = (x_0, y_0 + p).$$

► Directriz:

$$y = y_0 - p.$$

Elementos esenciales

La excentricidad es

$$e = 1.$$

El eje de simetría es

$$x = x_0.$$

► $p > 0$: abre hacia arriba.

► $p < 0$: abre hacia abajo.

Forma canónica

Para una parábola vertical,

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

► Vértice:

$$V = (x_0, y_0).$$

► Foco:

$$F = (x_0, y_0 + p).$$

► Directriz:

$$y = y_0 - p.$$

Elementos esenciales

La excentricidad es

$$e = 1.$$

El eje de simetría es

$$x = x_0.$$

► $p > 0$: abre hacia arriba.

► $p < 0$: abre hacia abajo.

Caso horizontal

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Forma canónica

Para una elipse con eje mayor horizontal,

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}, \quad a > b > 0.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

$$\boxed{F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0)}.$$

La excentricidad es

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}, \quad 0 < e < 1.$$

Forma canónica

Para una elipse con eje mayor horizontal,

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}, \quad a > b > 0.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

$$\boxed{F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0)}.$$

La excentricidad es

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}, \quad 0 < e < 1.$$

Los vértices secundarios son

$$W_{\pm} = (x_0, y_0 \pm b).$$

Idea clave

El denominador mayor determina la dirección del eje mayor.

Forma canónica

Para una hipérbola horizontal,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a}, \quad e > 1.$$

Forma canónica

Para una hipérbola horizontal,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

► Centro:

$$C = (x_0, y_0).$$

► Vértices:

$$V_{\pm} = (x_0 \pm a, y_0).$$

► Relación fundamental:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Focos y excentricidad

Los focos son

$$F_{\pm} = (x_0 \pm c, y_0).$$

La excentricidad es

$$e = \frac{c}{a}, \quad e > 1.$$

Las asíntotas son

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Secciones Cónicas

Parábola · Elipse · Hipérbola

Material, apuntes y recursos disponibles en

jricardomunozg.github.io