



Control 1 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

P1. Modelo de población con extracción constante.

[6 puntos]

La población de una especie de peces en un lago tiene una capacidad de carga de 800 individuos y, en ausencia de pesca, una tasa intrínseca de crecimiento de 0,8 por año. Se extraen H peces por año a una tasa constante. Sea $N(t)$ la población después de t años.

Recuerde que el modelo de población viene dado por la ecuación logística

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - H,$$

donde r denota la tasa intrínseca de crecimiento, K denota la capacidad de carga, y H se refiere a la cantidad extraída.

- (a) [3 puntos] Determine la máxima tasa constante de pesca $H_{\max}$ para la cual el modelo admite un equilibrio positivo y determine dicho equilibrio.
- (b) [3 puntos] Suponga que $H = 120$. Determine los equilibrios positivos y clasifique su estabilidad. A partir de este análisis, describa qué ocurre si $N(0) = 100$.

P2. Métodos de resolución, problema de valor inicial e intervalo maximal.

[6 puntos]

Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} xy' = y + 2xe^{-y/x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

- (a) [4.5 puntos] Resuelva el problema de valor inicial e indique claramente el método utilizado.
- (b) [1.5 puntos] Determine el intervalo maximal de existencia de la solución. Justifique su respuesta.

P3. Existencia, unicidad y comportamiento de soluciones.

[6 puntos]

Considere el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = e^x + \sin(y) + \cos(y), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Sin intentar resolver explícitamente la ecuación diferencial:

- (a) [2 puntos] Demuestre que

$$F(x, y) = e^x + \sin(y) + \cos(y)$$

es globalmente Lipschitz respecto de su segunda variable y concluya que el problema de valor inicial posee una única solución definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (b) [3 puntos] Demuestre que para todo $x \geq 0$ se cumple

$$e^x - \sqrt{2}x \leq y(x) \leq e^x + \sqrt{2}x.$$

(c) [1 puntos] Utilice las estimaciones anteriores para determinar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{e^x}$$

e interprete brevemente el resultado.

Hint: Recuerde que

$$|\sin(u) - \sin(v)| \leq |u - v|, \quad |\cos(u) - \cos(v)| \leq |u - v|,$$

y que

$$\sin(y) + \cos(y) = \sqrt{2} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right).$$

Herramienta	Fórmula / idea	Observación
Potencias	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$	En particular, $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$
Logaritmo	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	Más generalmente, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C.$
Factor integrante	Para $y' + P(x)y = Q(x),$ se utiliza $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}.$	
Ecuaciones homogéneas	Si $y' = F\left(\frac{y}{x}\right),$ se utiliza $v = \frac{y}{x}, \quad y = xv.$	En particular, $y' = v + xv'.$ La ecuación resultante suele ser de variables separables.
Ecuación de Bernoulli	Para $y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1,$ se utiliza $z = y^{1-n}.$	La sustitución transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal para z .
Límite exponencial	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$	El crecimiento exponencial domina al crecimiento lineal.
Teorema del sándwich	Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$	Permite determinar un límite a partir de cotas inferiores y superiores.